Recuperación
Primer Parcial
9 de Enero de 2020

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 90 min.

APELLIDOS:		P1	P2	P3	TOTAL
NOMBRE:					

1. **Sean $\vec{u}_1=(1,0,-1,0)$,$\vec{u}_2=(-1,10,0)$, $\vec{u}_3$=$(1,0,0,-1)$,$\vec{u}_4$=(6,-1,-2, α), $\alpha\in\mathbb{R}$**
   (a) Determinar los valores de α para los cuales el conjunto { $\vec{u}_1$,$\vec{u}_2$,$\vec{u}_3$, $\vec{u}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Para α =-3 escribir como combinación lineal de
   (c) Para α =--2 determinar las coordenadas del vector$\vec{u}=(2,0,1,1)$ con respecto a la base B={ $\vec{u}_1$,$\vec{u}_2$,$\vec{u}_3$, $\vec{u}_4\}$de $\mathbb{R}^4$

=(SOLUCIÓN.

(A) Reduciendo la matriz que tiene como filas los vectores dados resulta que

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&-1\\6&-1&-2&\alpha\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{21}(1)\\E_{31}(-1)\\E_{41}(-6)}}{}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&-1&4&\alpha\end{pmatrix}\underset{E_{42}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&3&\alpha\end{pmatrix}$$

$$\underset{E_{43}(-3)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&\alpha+3\end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que constituyen una base cuando $\alpha\neq-3$.

(B) Ahora reducimos a su forma canónica la matriz que los tiene en columna:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&6\\0&1&0&-1\\-1&0&0&-2\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\underset{E_{31}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1&6\\0&1&0&-1\\0&-1&1&4\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{32}(1)\\E_{12}(1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&5\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_{43}(1)\\E_{13}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que 2$\vec{u}_1$-$\vec{u}_2$+3$\vec{u}_3$=$\vec{u}_4$.

(C) Ahora reducimos a forma canónica la matriz que tiene como columnas a los cinco vectores dados:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&6&2\\0&1&0&-1&0\\-1&0&0&-2&1\\0&0&-1&-2&1\end{pmatrix}\underset{E_{31}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1&6&2\\0&1&0&-1&0\\0&-1&1&4&3\\0&0&-1&-2&1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{32}(1)\\E_{12}(1)}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&5&2\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&3&3\\0&0&-1&-2&1\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{43}(1)\\E_{13}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&3&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\underset{\substack{E_{34}(-3)\\E_{14}(-2)\\E_{24}(1)}}{}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-9\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&-9\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$

De donde deducimos que -9$\vec{u}_1$+4$\vec{u}_2$-9$\vec{u}_3$+4$\vec{u}_4=\vec{v}=\begin{pmatrix}-9\\4\\-9\\4\end{pmatrix}_B$.

Recuperación
Primer Parcial
9 de Enero de 2020

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 90 min.

APELLIDOS:		P1	P2	P3	TOTAL
NOMBRE:					

2. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por

$$S_a = \mathcal{L}\{(1,2,0,0),(1,-1,1,0),(2,1,1,a)\}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, \text{ y}$$
$$T = \left\{ (x,y,z,t) : \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ x-t=0 \end{array} \right\}.$$

Se pide:

(a) (**1 punto**) Hallar la dimensión de S_a según los valores de a.

(b) (**1 puntos**) Hallar unas ecuaciones implícitas de S_0.

(c) (**1 punto**)Hallar una base de $S_0 + T$ y la dimensión de $S_0 \cap T$.

(d) (**0.2 puntos**) Definir el concepto de suma directa de dos subespacios.

(e) (**0.3 puntos**) Razonar si S_0 y T hacen suma directa y/o son complementarios.

SOLUCIÓN.

(a) Reduciendo la matriz que los tiene como filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

Se deduce que $\dim(S_\alpha) = \begin{cases} 2, si\ \alpha = 0 \\ 3, si\ \alpha \neq 0 \end{cases}$.

(b) Para $\alpha = 0$ una base del subespacio es $B(S_0) = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, por lo que unas ecuaciones paramétricas serán $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 3\beta \\ z = \beta \\ t = 0 \end{cases}$, eliminando los dos parámetros obtenemos las ecuaciones implícitas $\begin{cases} y = 2x - 3z \\ t = 0 \end{cases}$.

(c) Reduciendo la matriz de coeficientes del sistema que define a T se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{E_{12}(1) \\ E_{32}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{E_{13}(1) \\ E_{23}(2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

De aquí deducimos otras ecuaciones implícitas de T más simples $\begin{cases} x - t = 0 \\ y + 2t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$. Las paramétricas serían $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \\ t = \alpha \end{cases}$ por lo que una base de T es $B(T) = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Para calcular la suma de ambos subespacios reducimos la matriz que tiene en fila los vectores de las bases de ambos:

APELLIDOS:		P1	P2	P3	TOTAL
NOMBRE:					

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-3&1&0\\1&-2&1&1\end{pmatrix}\underset{E_{31}(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-3&1&0\\0&-4&1&1\end{pmatrix}\underset{E_3(-3)}{\overset{\sim}{E_2(4)}}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-12&4&0\\0&12&-3&-3\end{pmatrix}\underset{E_{32}(1)}{\overset{\sim}{E_2\left(\frac{1}{4}\right)}}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-3&1&0\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

.

Por lo que una base del subespacio suma es $B(S_0+T)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$, con lo que $\dim(S_0+T)=3$. Ahora aplicamos la fórmula de Grassman y será $\dim(S_0\cap T)=2+1-3=0$.

Por lo tanto la suma de ambos es directa pero no son complementarios.

3. (a) Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$, cuya matriz respecto de las bases $B=\{(1,1,0),(0,0,1),(0,1$ y $B'=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-1,1,0),(1,0,0,-1)\}$ es

$$M_f(B,B')=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&-1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

(i) (**1.5 puntos**) Hallar la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas.

(ii) (**1 punto**) Hallar unas bases de los subespacios núcleo e imagen de f.

(iii) (**0.5 puntos**) Razonar si f es monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo.

(b) (**0.5 puntos**) Una aplicación lineal $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$, ¿podría ser un epimorfismo? Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN.

(A) Tenemos que hacer un cambio de base aplicando la fórmula $\mathcal{M}(f,B_3^C,B_4^C)=\mathrm{C}(B^*,B_4^C)\mathcal{M}(f,B,B^*)\mathrm{C}(B_3^C,B)$.

Ahora calculamos $\mathrm{C}(B_3^C,B)$. Disponemos ambas bases en la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{E_{21}(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\underset{E_{32}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{E_{23}(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\ \mathrm{C}(B_3^C,B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Entonces como $\mathrm{C}(B^*,B_4^C)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$, será

$$\mathcal{M}(f,B_3^C,B_4^C)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&-1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-1&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(b) $B(Ker(f))=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, B(Im(f))=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$

© No es nada. No puede ser epimorfismo (contradice la fla. De las dimensiones)